



TITLE:

Specht moduleの既約成分について (有限群のコホモロジー論の研究)

AUTHOR(S):

津島, 行男

CITATION:

津島, 行男. Specht moduleの既約成分について (有限群のコホモロジー論の研究). 数理解析研究所講究録 2000, 1140: 122-126

ISSUE DATE:

2000-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63847>

RIGHT:

Specht module の既約成分について

津島行男 (Yukio Tsushima)
大阪市立大学理学部

1 準備

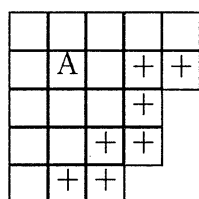
初めにいくつかの用語と記号を説明する。殆ど標準的なものであり、例えば James[2,3] 等で使われているものと同じである。

n を自然数とし、 p を素数とする。非負整数の数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_f)$ が n の分割であるとは、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_f$ であり、それらの和が n であることをいう。 $\lambda_d \neq 0$ かつ $\lambda_{d+1} = 0$ であるとき、 $d = d(\lambda)$ と表す。もし、 $\lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+p} > 0$ となるような番号 $i \geq 0$ があるならば、 λ を p -singular という。 p -singular でないとき、 p -regular という。 $P(n)$ を n の分割全部の集合とし、そのなかで p -regular なもの全体のつくる部分集合を $P(n)^0$ と表す。 $P(n)$ には dominance order とよばれる順序 \leq がある。すなわち $\lambda, \mu \in P(n)$ について

$$\lambda \leq \mu \iff \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \quad \text{for all } i \geq 1.$$

分割 λ に対し、同じ大きさの正方形を第 i 行に λ_i 個ずつ左側を揃えて並べたものをヤング図形といい、 $[\lambda]$ と表す。ヤング図形において、上から i 行目、左から j 列目にある正方形を $A(i, j)$ とするとき、 A の右側にある水平部分を A の腕 (arm)、 A の下にある垂直部分を脚 (leg) という。 A 自身と腕、および脚を合わせた図形を $[\lambda]$ の (i, j) -hook といい、そこに出てくる正方形の個数を hook length よんで、 $h_{ij}(\lambda)$ あるいは単に h_{ij} と書く。(個数を長さに読み替えるのは各正方形の長さを 1 とみているからである。) 脚の長さが 0 である hook を bar(横木)、腕の長さが 0 である hook を pillar(柱) という。(これは、ここだけの用語である。) A の hook length $h_{ij}(\lambda)$ は A の脚の下端からヤング図形の縁 (rim) に沿って腕の右端に至るまでに通過する正方形の個数に等しい。このような縁を $[\lambda]$ の (i, j) -rim hook とよぶ。

例 1. 下図では $h_{22} = 7$ 。プラス記号+の部分の部分が $(2, 2)$ -rim hook である。



$G = S_n$ を n 次対称群とし, L を体とする. 各 $\lambda \in P(n)$ に対して, Specht module とよばれる LG -module S^λ が構成されて, 以下の性質をもつ.

(1.1) $\text{Char } L = 0$ のとき, S^λ は絶対既約であり, 集合 $\{S^\lambda; \lambda \in P(n)\}$ は既約 LG -modules の完全代表系になる.

(1.2) $\text{Char } L = p$ の場合, $\lambda \in P(n)^0$ ならば, $D^\lambda = S^\lambda / \text{rad}(S^\lambda)$ は絶対既約であり, 集合 $\{D^\lambda; \lambda \in P(n)^0\}$ は既約 LG -modules の完全代表系となる. さらに, S^λ における D^μ の重複度 $d_{\lambda\mu}$ ($\mu \in P(n)^0$) について, 次が成り立つ:

$$(1) \ d_{\lambda\mu} \neq 0 \quad \text{ならば} \quad \lambda \leq \mu \quad (2) \ d_{\mu\mu} = 1.$$

(1.3) $(\text{Char } L = p) \lambda \in P(n)^0$ のとき, S^λ が既約 (i.e., $S^\lambda = D^\lambda$) であるための必要十分条件は, $\nu_p(h_{ij}) = \nu_p(h_{kj})$ がすべての i, j, k について成り立つことである.

なお, 例 1 の $\lambda = (5, 5, 4, 4, 3)$ のように同じ数が続くときは, $\lambda = (5^2, 4^2, 3)$ と表す.

例 2.

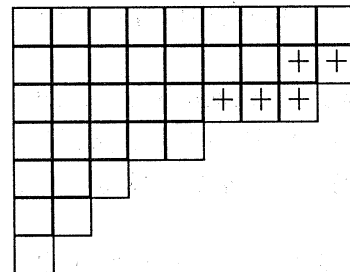
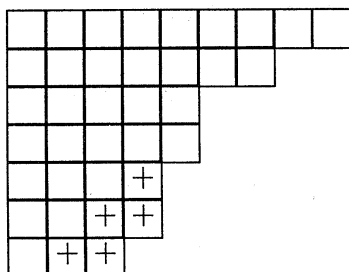
(1) (n) は dominance order に関して $P(n)$ の最大限であり, $S^{(n)}$ は 1 次元の自明な加群である.

(2) $\lambda = (1^n)$ とすると, S^λ は交代指標の加群 L_a を与える. $\text{Char } L = p$ で, $n \geq p$ のときは λ は p -regular ではないから, これを D^λ と書くわけにはいかない. この場合, $n = (p-1)k + e$ ($0 \leq e < p-1$) とし, $\mu = ((k+1)^e, k^{p-1-e})$ とすると, これは p -regular で, $D^\mu = L_a$ となる.

2 ヤング図形上の操作

与えられた $\lambda \in P(n)$ と自然数 a, b, c ($a < b$) に対して $\lambda(a, b, c)$ を次のように定義する; $[\lambda]$ の (b, c) -rim hook を取り外して (unwrap), $[\lambda]$ の a 行の右端から rim に沿って取り外した $h_{bc}(\lambda)$ 個の正方形を 1 つずつ取り付けていく (wrap). この結果が n の分割となっている (すなわち非増加な数列になっている) とき, それを $\lambda(a, b, c)$ と書いて, λ の branch とよぶことにする.

例 3. 下の左側のヤング図形において, $(5, 2)$ -rim hook を取り外して, 3 行の右端から順次取り付けたものが右側のヤング図形 $\lambda(3, 5, 2)$ となる.



注意 1. branch の定義は James[3] による. ただし branch という用語はそこでは使われていない.

注意 2. 一般に $\lambda \leq \lambda(a, b, c)$ が成り立つ.

以下 $\text{Char } L = p$ とする. Specht module S^λ の既約成分の集合 (これを $\text{IBr}(S^\lambda)$ と記す) についての状況を知りたいというのが本研究の動機である. まずこれに関する Carter-Payne の定理を述べよう. λ から $\lambda(a, b, c)$ を作る時, 取り外した rim hook と取り付けた rim hook のいずれもが bar であるならば $\lambda(a, b, c)$ を λ の bar type branch という. 同様にして, pillar type branch も定義される.

定理 1 (Carter and Payne[1]). $\lambda(a, b, c)$ を $\lambda (\in P(n))$ の bar (pillar resp.) type branch とし, $e = \nu_p(h_{ac})$ とおく. もし取り外した bar (pillar resp.) の長さ h_{bc} に対して, $p^e > h_{bc}$ が満たされるならば, 次が成り立つ:

$$\text{Hom}_G(S^{\lambda(a, b, c)}, S^\lambda) \neq 0.$$

従って $\lambda(a, b, c) \in P(n)^0$ ならば, $D^{\lambda(a, b, c)} \in \text{IBr}(S^\lambda)$ である.

上の定理は Carter and Payne[1] においては, bar type の場合しか取り扱われてないが, pillar type の場合は次の同型を用いると, bar lift の場合に帰着できる. すなわち $[\lambda']$ を $[\lambda]$ の転置, S^* を S の L -dual とするとき

$$(2.1) \quad (\text{James}[2]) \quad S^{\lambda'} \otimes L_a \simeq (S^\lambda)^*.$$

$\lambda(a, b, c)$ の構成の際, 取り外した rim-hook の脚の長さを取り付けてできた rim-hook の脚の長さの和を $l(a, b, c)$ と表す. LG の Grothendieck group のなかで, 次のような表示を考える.

$$(2.2) \quad \sum_c \sum_{a < b} (-1)^{l(a, b, c)} (\nu_p(h_{ac}) - \nu_p(h_{bc})) S^{\lambda(a, b, c)} = \sum_{\mu \in P(n)^0} \alpha_{\lambda\mu} D^\mu.$$

上式は左辺を Grothendieck group の \mathbb{Z} -基底である $\{D^\mu; \mu \in P(n)^0\}$ の線形結合で表したものが右辺になるという意味である ($\alpha_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$). このとき次の定理が成り立つ.

定理 2 (Jantzen-Schaper, cf. James and Mathas[4]) $\mu \in P(n)^0$ とする.

- (1) 任意の $\lambda \in P(n)$ に対し, $\alpha_{\lambda\mu} \geq 0$;
- (2) $\lambda \neq \mu$ ならば, $d_{\lambda\mu} \leq \alpha_{\lambda\mu}$ であり, さらに, $d_{\lambda\mu} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_{\lambda\mu} \neq 0$.

先へ進む前に記号を導入する. まず n の分割 μ に対し, $\lambda \rightarrow \mu$ とは, $\lambda = \mu$ か又は μ が λ から始めて branch を作る操作を何回か続けて得られている場合とする. さらに, 次のようにおく.

$$(2.3) \quad \Gamma_\lambda = \{\lambda(a, b, c); \nu_p(h_{ac}) \neq \nu_p(h_{bc})\};$$

$$(2.4) \quad m_\lambda(S^{\lambda(a,b,c)}) = (-1)^{l(a,b,c)}(\nu_p(h_{ac}) - \nu_p(h_{bc})).$$

次の系は上の定理より容易に分かる.

系 3.

$$(1) \quad \text{IBr}(S^\lambda) \subset \{D^\mu; \lambda \rightarrow \mu, \mu \in P(n)^0\};$$

(2) $\tilde{\lambda} \in \Gamma_\lambda^0$ が次の 2 つの条件を満たせば, $D^{\tilde{\lambda}} \in \text{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つ.

$$(i) \quad m_\lambda(S^{\tilde{\lambda}}) > 0;$$

$$(ii) \quad \delta \in \Gamma_\lambda \text{ かつ } \delta \leq \tilde{\lambda} \text{ ならば, } m_\lambda(S^\delta) > 0.$$

(3) μ を Γ_λ のなかの dominance order についての極小元とする. もし μ が p -regular ならば, $D^\mu \in \text{IBr}(S^\lambda)$ である.

[証明](1) は (1.2) と (2.2) より dominance order に関する上からの帰納法で証明される.

(2)(2.2) の左辺において, $D^{\tilde{\lambda}}$ を既約成分に含むような $S^\delta (\delta \in \Gamma_\lambda)$ があれば, $\delta \leq \tilde{\lambda}$ であり, 従って $m_\lambda(S^\delta) > 0$ なので, $m_\lambda(S^{\tilde{\lambda}})S^{\tilde{\lambda}}$ よりでてくる $D^{\tilde{\lambda}}$ が (2.2) の左辺の計算のなかで消えることはない. 従って, $\alpha_{\lambda\tilde{\lambda}} \neq 0$ であるから定理 2 より $d_{\lambda\tilde{\lambda}} \neq 0$ である.

(3) 仮定と上と同様な議論によって, $\alpha_{\lambda\mu} = m_\lambda(S^\mu)$ となり, これは 0 でない. よって, $d_{\lambda\mu} \neq 0$.

定理 2 を見ると, ある $\mu \in \Gamma_\lambda^0 := \Gamma_\lambda \cap P(n)^0$ に対し $D^\mu \in \text{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つと考えるのは自然であろう. ここではこれが正しいことを次の形で述べておく.

定理 4. $\lambda \in P(n)^0$ で S^λ は既約ではないとする. このとき, 系 3 (2) の 2 つの条件を満たす $\tilde{\lambda} \in \min \Gamma_\lambda^0$ がある. 従って $D^{\tilde{\lambda}} \in \text{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つ. ($\min X$ は X のなかの (\leq に関する) 極小元の集合を表す.)

証明方法はもっぱら diagram chasing arguments によるもので初等的ではあるが, その分細かな議論を必要とする. 以下に大筋だけを述べておく.

Step 1. λ の (ヤング図形の) 第 1 列を λ_1 , これより右にある図形を μ とすると, μ は $n - d(\lambda)$ の分割である. このことを, $\lambda = (\lambda_1', \mu)$ と表すことにする. もし, S^μ が既約ならば, Γ_λ の元はすべて p -regular であることが証明できる. 従って, 系 3 より定理 4 は正しい.

Step 2. S^μ は既約でないとする. n に関する帰納法を用いて, μ に対し定理の主張が成り立つような $\tilde{\mu}$ を取る. もし, $(\lambda_1', \tilde{\mu})$ が p -regular であれば, これを $\tilde{\lambda}$ とおけば, 定理の主張が成り立つ.

Step 3. 上のことから, $\tilde{\mu}$ の取り方によらず $(\lambda'_1, \tilde{\mu})$ は p -singular と仮定してよい. $\lambda = (1^r, 2^s, \dots)$ とおいて, $r = p - 1$ の場合と, $r \leq p - 2$ の場合に分けて考える.

定理 4 を弱めて, ある $\mu \in \Gamma_\lambda^0$ に対し $D^\mu \in \text{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つという主張にすると, 証明は少し簡単になる. もちろん, 上のような形にしておけば, このような μ のいくつかを具体的に求めることができるというメリットがある. あまり自信はないが, 次のような問題を提起しておきたい.

問題 λ は p -regular で S^λ は既約ではないとする. このとき $\min \Gamma_\lambda^0$ の任意の元 μ に対し, $D^\mu \in \text{IBr}(S^\lambda)$ が成り立つか?

References

- [1] R.W.Carter and M.T.J.Payne: On homomorphisms between Weyl modules and Specht modules: Math.Proc.Camb.Phil. Soc.87(1980), 419-425.
- [2] G.James: The representation theory of the symmetric group, Springer LN.682(1978).
- [3] G.James: The representation theory of the symmetric groups, Proc. Symposia in Pure Math.47 (1987), 111-126.
- [4] G.James and A.Mathas: A q -analogue of the Jantzen-Schaper theorem, Proc.London Math.Soc.74(1997), 241-274.